Maximilian Merkert und Clemens Zeile
Wintersemester 2020/2021

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 1

Abgabe bis 3.11., Präsentation am 10.11.

Wichtige organisatorische Informationen

- Es gibt in jeder Woche dienstags ein Übungsblatt, welches über die Homepage und moodle bereitgestellt wird.
- Die Lösungen müssen bis zum darauffolgenden Dienstag, 11 Uhr, abgegeben werden. Es ist möglich die Abgabe digital im PDF-Dateiformat (z.B: als Scan der handschriftlichen Lösungen) oder "physisch" auf Papier abzugeben. Die digitale Abgabe kann per Mail an clemens.zeile@ovgu.de oder über moodle erfolgen. Papier-Abgaben sind dienstags zwischen 9-11 Uhr im Büro G02-221a möglich.
- Die bewerteten Lösungen werden eine Woche nach Abgabe zurückgegeben (je nach Wunsch auf Papier oder digital) und die Aufgaben in der Übung besprochen, bzw. Lösungen präsentiert.
- Eines der Übungsblätter gegen Semesterende wird aus einer Programmieraufgabe bestehen, die in `Matlab` oder einer verwandten Sprache zu bearbeiten ist.
- Die Erarbeitung der Lösungen soll in Zweiergruppen – in Ausnahme in Dreiergruppen – erfolgen, wobei jeder in der Lage sein muss, die Tafelpräsentation zu übernehmen.
- Voraussetzungen für die Teilnahme an der Klausur zum Erwerb des Leistungsnachweises sind $\geq 50\,\%$ der Punkte aus den Übungen *und* das erfolgreiche Vorrechnen einer der Aufgaben.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige, dass für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und für alle $a \in A$ gilt: $\operatorname{aff}(A) = a + \operatorname{lin}(A - a)$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeige folgende Äquivalenz:

(i) $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ (mit $k \in \mathbb{N}$) sind affin unabhängig.

(ii) Kein Punkt a_i lässt sich als affine Kombination der restlichen Punkte $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k$ darstellen.

(iii) Die Punkte $(a_1, 1), \dots, (a_k, 1)$ aus $\mathbb{R}^{n+1}$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeige, dass eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau dann affin ist, wenn F als $F(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ dargestellt werden kann.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Bestimme $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\widetilde{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\widetilde{c} \in \mathbb{R}^n$, so dass die linearen Optimierungprobleme (LPs)

$$\min\{\langle c, x\rangle : Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\}$$

und

$$\max\left\{\langle \widetilde{c}, x\rangle : \widetilde{A}x \leq \widetilde{b}, x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

die gleichen zulässigen Lösungen und die gleichen Optimallösungen haben.