Maximilian Merkert und Clemens Zeile
Wintersemester 2020/2021

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 2

Abgabe bis 10.11, Präsentation am 17.11.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen und seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ affine Abbildungen. Zeige, dass dann $F(A)$, $G^{-1}(A)$ und $A + B$ konvexe Mengen sind.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zeige, dass $[0,1]^n$, $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ konvexe Mengen sind.

Aufgabe 3 (2+2+2+1 Punkte)

Beweise folgende Aussagen aus der Vorlesung über Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$:

(a) A ist genau dann konvex, wenn $A = \operatorname{conv}(A)$ gilt.

(b) $\operatorname{conv}(A)$ ist Durchschnitt aller konvexer Mengen, die A als Teilmengen enthalten.

(c) Es gilt $\operatorname{conv}(A + B) = \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B)$.

(d) Es gilt $\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(A)) = \operatorname{conv}(A)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Wir betrachten zwei endliche Herden $B, R \subseteq \mathbb{R}^2$ von blauen bzw. roten Schafen auf einer ebenen Weide. Schäfer Ulf wollte um 12:34 eigentlich einen geradlinigen Zaun bauen, der die roten von den blauen Schafen strikt trennt (d.h. eine Gerade finden, sodass alle $b \in B$ auf der einen Seite und alle $r \in R$ auf der anderen Seite sind), stellt aber fest, dass dies nicht geht.
Zeige, dass er seine Frau Gertrud davon überzeugen kann, dass dies nicht seine Schuld ist, indem er ihr nur die Positionen von höchstens 4 Schafen mitteilt.
Hinweis: Benutzen Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von kompakten konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$ gilt.

Hinweis: Benutze den Satz von Helly (aus der Vorlesung).