Maximilian Merkert und Clemens Zeile
Wintersemester 2020/2021

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 3

Abgabe bis 17.11., Präsentation am 24.11.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

Zeige, dass die zusätzliche Kompaktheitsforderung im Satz von Helly für unendliche Mengenfamilien notwendig ist, d.h., konstruiere jeweils eine Folge von

(a) abgeschlossenen aber nicht beschränkten, bzw.

(b) beschränkten aber nicht abgeschlossenen

konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$ für alle $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$, für die $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ gilt.

Hinweis: Man findet Beispiele bereits im $\mathbb{R}^1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge, sodass je $n+1$ Punkte aus S in einer abgeschlossenen Kugel mit Radius r enthalten sind. Zeige, dass S in einer abgeschlossenen Kugel mit Radius r enthalten ist.

Hinweis: Benutze den Satz von Helly.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder und $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ die Projektion mit $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Zeigen Sie, dass $\pi(P)$ ebenfalls ein Polyeder ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Es seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}^2$ gegeben:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie wie im Beweis zu Satz 2.6 (Satz von Caratheodory für konvexe Mengen) das arithmetische Mittel $x = \frac{a_1+\ldots+a_5}{5}$ von den obigen Vektoren als Konvexkombination einer affin unabhängigen Teilmenge von $\{a_1, \ldots, a_5\}$ dar.