Maximilian Merkert und Clemens Zeile
Wintersemester 2020/2021

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 4

Abgabe am 24.11., Präsentation am 1.12.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder in $\mathbb{R}^n$ und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $F(P)$ ein Polyeder ist.

(b) Berechnen Sie eine Ungleichungsbeschreibung für $F(P)$ im Fall $P = [0,1]^3$ und

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Lösen Sie die lineare Aufgabe

$$\min \left\{ -x_4 - 2x_5 - x_6 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix},\ x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

mit der Simplex-Methode. Benutzen Sie als Startlösung die Basislösung mit $B = \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 3 (2+2+4 Punkte)

Sie haben Zugriff zu einer Maschine, welche Papier einer festen Breite β und einer beliebigen vorgegebenen Länge $\lambda > 0$ erstellt. Das erstellte Papier liegt in der Form einer Rolle der Breite β vor. Nun bekommen Sie k Aufträge, die durch Paare (β_i, λ_i) mit $i \in [k]$ beschrieben sind. Der i-te Auftrag besteht darin, Papierrollen der Breite $\beta_i > 0$ und der Gesamtlänge mindestens $\lambda_i > 0$ zu erstellen (es ist erlaubt, mehrere Papierrollen der Breite β_i zu erstellen, um den Auftrag zu erledigen). Um die Aufträge zu erledigen, können Sie mit Hilfe Ihrer Maschine etliche Papierrollen der Breite β erstellen und passend zuschneiden. Berechnen Sie in den folgenden Situationen mit Hilfe eines linearen Problems die minimale Gesamtlänge der Papierrollen der Breite β, welche Sie erstellen müssen, um alle Aufträge zu erledigen:

(a) $\beta = 1{,}5$, $k = 2$ und

$$\beta_1 = 0{,}4 \qquad \lambda_1 = 100$$
$$\beta_2 = 0{,}6 \qquad \lambda_2 = 100$$

Hier zur Illustration noch ein Beispiel einer nichtoptimalen Lösung. Wenn Sie etwa eine Rolle der Breite 1,5 und Länge 100/3 nach der Formel $1{,}5 = 3 \cdot 0{,}4 + 0{,}3$ zuschneiden, so erhalten Sie 3 Papierrollen der Breite 0,4 mit der Gesamtlänge $3 \cdot 100/3 = 100$. Somit erledigen Sie den ersten Auftrag. Wenn Sie eine Rolle der

Breite 1,5 und Länge 50 nach der Formel $1{,}5 = 2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3$ zuschneiden, so erhalten Sie Papierrollen der Breite 0,6 mit der Gesamtlänge $2 \cdot 50 = 100$ und erledigen auch den zweiten Auftrag. Die Gesamtlänge der Papierrolle der Breite 1,5, die sie bei dieser Lösung benutzen ist $100/3 + 50$. Bei der Suche nach optimalen Lösungen sollen weitere Zuschnitt-Varianten berücksichtigt werden.

(b) $\beta = 1{,}8$, $k = 3$ und

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0{,}4 & \lambda_1 &= 50 \\ \beta_2 &= 0{,}6 & \lambda_2 &= 100 \\ \beta_3 &= 0{,}7 & \lambda_2 &= 80 \end{aligned}$$

Für diese Instanz können Sie das zugehörige lineare Problem mit Hilfe von Python oder Matlab lösen.

(c) $\beta = 600$, $k = 13$ und

i	β_i	λ_i
1	138	22000
2	152	25000
3	156	12000
4	171	14000
5	182	18000
6	188	18000
7	193	20000
8	200	10000
9	205	12000
10	210	14000
11	214	16000
12	215	18000
13	220	20000

Für diese Instanz soll die Generierung sowie das Lösen des linearen Problems in Python oder Matlab umgesetzt werden. Hierbei bietet es sich an eine Funktion zu schreiben, welche die Matrix A der Nebenbedingung rekursiv aus allen möglichen Zusschnittvarianten berechnet. Die Lösungen dieses Teils der Aufgabe sollen per Email eingereicht werden (bei mehreren Dateien als zip-Archiv).