Maximilian Merkert und Clemens Zeile
Wintersemester 2020/2021

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 5

Abgabe bis 1.12., Präsentation am 8.12.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Löse das folgende Optimierungsproblem mit dem Simplex-Algorithmus mit Blands Regel:

$$\begin{array}{rrrrcr} \min & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 & & \\ & -x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & +x_2 & -3x_3 & \leq & 3 \\ & -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 2 \\ & & & x & \in & \mathbb{R}^3_+ \end{array}$$

Zur Ermittlung einer Startbasis kann eine Basis von Schlupfvariablen gewählt werden.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Löse das Optimierungsproblem aus dem Beispiel 3.9 aus der Vorlesung mit dem Simplex-Algorithmus und Blands Regel, d.h. betrachte das Problem:

$$\begin{array}{rrrcr} \min & -x_1 & -2x_2 & & \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq & 6 \\ & & x & \in & \mathbb{R}^2_+ \end{array}$$

Wie in der Vorlesung kann zur Ermittlung einer Startbasis eine Basis von Schlupfvariablen gewählt werden.

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte)

Beweise oder widerlege folgende Aussagen zum Simplex-Algorithmus:

(a) Eine Variable, die gerade in die Basis eingetreten ist, kann die Basis beim nächsten Schritt wieder verlassen.

(b) Falls keine Basislösung entartet ist und das LP beschränkt ist, so ist die Optimallösung eindeutig.

(c) Ist eine Variable x_j ohne Vorzeichenbeschränkung vor dem Start durch $x_j^+ - x_j^-$ mit $(x_j^+, x_j^- \geq 0)$ ersetzt worden, so ist in jedem Schritt des Simplexverfahrens höchstens eine der Variablen x_j^+, x_j^- ungleich Null.

Aufgabe 4 (3+3+3 Punkte)

Man betrachte eine beschränkte und zulässige Aufgabe (std-LP) für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit vollem Zeilenrang. Für jedes $\epsilon > 0$ führen wir die Aufgabe

$$\min \{\langle c, x\rangle : x \geq 0,\ Ax = b + Av(\epsilon)\} \qquad \text{(std-LP-}\epsilon\text{)}$$

ein, mit $v(\epsilon) := (\epsilon^i)_{i \in [n]}$. Zeigen Sie, dass für alle genügend kleinen Werte von $\epsilon > 0$ Folgendes gilt:

(a) Ist die Lösung von (std-LP-ϵ) zu einer Basis $(a_i)_{i \in B}$ zulässig, so ist die Lösung (std-LP) zur Basis $(a_i)_{i \in B}$ auch zulässig.

(b) Die Aufgabe (std-LP-ϵ) ist beschränkt und zulässig.

(c) Für den Optimalwert f_ϵ^* von (std-LP-ϵ) und den Optimalwert f^* von (std-LP) gilt $f^* - f_\epsilon^* = O(\epsilon)$ für $\epsilon \downarrow 0$.