Maximilian Merkert und Clemens Zeile
Wintersemester 2020/2021

# Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 8

Abgabe bis 22.12., Präsentation am 05.01.2021

**Aufgabe 1** (6 Punkte)

Betrachte die Vektoren $a_1 = (1,1,0)$ und $a_2 = (0,1,1)$ und die LPs

$$\min\{\langle c,x\rangle \mid Ax = b, x \geq \mathbb{O}\} \text{ und } \tag{std-LP}$$
$$\max\{\langle b,y\rangle \mid A^\top y \leq c\} \ . \tag{std-LP-dual}$$

Finde einen Vektor $a_3 \in \mathbb{R}^3$, sodass für $A = (a_1, a_2, a_3)$ folgendes möglich ist:

(a) Es gibt $b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (std-LP) unbeschränkt und (std-LP-dual) unzulässig sind.

(b) Es gibt $b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (std-LP) unzulässig und (std-LP-dual) unbeschränkt sind.

(c) Es gibt $b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (std-LP) unzulässig und (std-LP-dual) unzulässig sind.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Seien $c = (7,6,5,-2,3) \in \mathbb{R}^5$, $b = (4,3,5,1) \in \mathbb{R}^4$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir wollen überprüfen, ob $x^* = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ eine Optimallösung von $\max\{\langle c,x\rangle : Ax \leq b, x \geq \mathbb{O}_5\}$ ist. Betrachte dazu eine potenzielle Lösung $y^*$ des dualen LPs und wende auf $x^*$ und $y^*$ den Satz vom komplementären Schlupf an.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Beweise: Seien $A, B, C, D$ Matrizen und $c, d$ Vektoren mit Komponenten in $\mathbb{R}$ derart, dass das System $Ax + By = b$, $Cx + Dy \leq d$, $x \geq 0$ in unbekannten Vektoren $x$ und $y$ wohldefiniert ist. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Es gibt $x \geq 0$ und $y$, die $Ax + By = b$ und $Cx + Dy \leq d$ erfüllen.

(ii) Für alle $u$ und $v \geq 0$ gilt die Implikation $(uA + vC \geq 0,\ uB + vD = 0) \Rightarrow ub + vd \geq 0$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Angenommen, das Hilfsproblem $\min\{z \mid Ax + bz = b, x, z \geq 0\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, wobei $A$ vollen Zeilenrang hat) zum Finden einer zulässigen Basislösung hat als Optimum $z^* > 0$, d.h. das Originalproblem $Ax = b, x \geq 0$ ist unzulässig.
Finde heraus, wie man aus dem aktuellen Tableau einen "Farkas-Strahl" $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^\top A \geq 0$ und $y^\top b < 0$ konstruiert.

*Hinweis*: Betrachte die zur aktuellen Basis gehörige Duallösung $y^*$, wie sie im Abschnitt "Basis-Darstellung von (std-LP-dual)" konstruiert wird.