Maximilian Merkert und Clemens Zeile
Wintersemester 2020/2021

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 11

Abgabe bis 19.01., Präsentation am 26.01.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei x Fluss in einem Flussnetzwerk $N = (G, s, t, c)$. Zeigen Sie, dass für jeden s-t-Schnitt (S, T) der Wert $x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S))$ mit dem Wert des Flusses x übereinstimmt.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Zeigen Sie, dass bei einer abgeschlossenen konvexen Menge

(a) jede Seite eine abgeschlossene konvexe Menge ist;

(b) jede Stützmenge eine Seite ist.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang, seien $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Man betrachte die Polyeder

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b,\ x \geq 0\} \qquad \text{und} \qquad Q = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, yA \leq c\},$$

welche die Mengen der zulässigen Lösungen von (std-LP) bzw. (std-LP-dual) bilden. Zeigen Sie Folgendes:

(a) $\mathrm{vert}(P)$ ist die Menge aller zulässigen Basislösungen von (std-LP).

(b) $\mathrm{vert}(Q)$ ist die Menge aller zulässigen Basislösungen von (std-LP-dual).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie Proposition 6.8 aus der Vorlesung, d.h. folgende Aussage. Sei A nichtleere abgeschlossene, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(a) $\mathrm{lineal}(A)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

(b) Für jedes $u \in \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

  (i) $u \in \mathrm{lineal}(A)$

  (ii) $x + \lambda u \in A$ gilt für alle $x \in A$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

  (iii) Es gibt ein $x \in A$ mit $x + \lambda u \in A$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Man hat $A = B \oplus \mathrm{lineal}(A)$ für eine abgeschlossene geradenfreie konvexe Menge B.