Maximilian Merkert und Clemens Zeile
Wintersemester 2020/2021

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 12

Abgabe bis 26.01., Präsentation am 02.02.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Firma *SuperHomeEnergy* mischt ihr Haushaltsgas aus den Rohgasen drei verschiedener Lieferanten. Heizwert, Schwefelgehalt und Preis der Rohgase entnehmen Sie bitte der folgenden Tabelle:

	Heizwert in kJ/m^3	Schwefelgehalt in g/m^3	Preis in 1/m^3
Lieferant A	4 000 000	6	0,50
Lieferant B	8 000 000	2	3,50
Lieferant C	6 000 000	2	2,50

Diese sollen zu einem möglichst billigen Mischgas mit einem Heizwert zwischen 6 000 000 und 8 000 000 kJ/m^3 und einem Schwefelgehalt von höchstens 3 g/m^3 verarbeitet werden. Formulieren Sie die Aufgabe, eine billigste Mischung zu bestimmen, die den Restriktionen genügt, als lineares Optimierungsproblem.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix.
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.t.} & Ax = c \end{array} \tag{LP}$$

(a) Erstellen Sie ein duales Problem zu (LP).

(b) Zeigen Sie, dass für (LP) jede zulässige Lösung optimal ist.

Aufgabe 3 (3+1 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ nicht leer. Zeigen Sie

(a) $\operatorname{rec}(P) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$,

(b) $\operatorname{lineal}(P) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Entscheide über die Korrektheit jeder der folgenden Aussagen.

1. Für alle $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt: $\operatorname{conv}(A \cup B) = \operatorname{conv}(A) \cup \operatorname{conv}(B)$.
2. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \operatorname{conv}(X)$. Dann gilt $x \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k)$ für jede Menge von affin unabhängigen Punkten $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit $k = n + 1$.
3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen und seien $x, y \in A$.
   Dann gilt $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \operatorname{int}(A)$ für alle $0 < \lambda < 1$.
4. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Falls $\tilde{x} \notin \operatorname{conv}(X)$, so existiert ein $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, u \rangle \leq 1$ für alle $x \in X$ und $\langle \tilde{x}, u \rangle > 1$.
5. Ist ein LP unzulässig, so ist das dazugehörige duale LP unbeschränkt.
6. Im Simplex-Algorithmus mit der Bland-Regel führt jeder Basiswechsel zu einer echten Verbesserung des Zielfunktionswerts der jeweils aktuellen Basislösung.

Die folgenden Aufgaben sind **Bonusaufgaben**. Hierbei können optional Punkte erzielt werden, welche zur Gesamtpunktzahl hinzuaddiert werden; die 50-Prozent-Punktzahl zur Zulassung erhöht sich dadurch nicht.

Aufgabe 5 (4+4 Punkte)

Seien R und B endliche Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, für welche eine affine Funktion $f(x, y) = ax + by - c$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ die Ungleichungen $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in R$ und $f(x, y) < 0$ für alle $(x, y) \in B$ erfüllt.

(a) Beschreiben Sie, wie man für gegebene R und B die Koeffizienten a, b, c der Funktion f mit Hilfe der linearen Optimierung berechnen kann.

(b) Setzen Sie Ihren Ansatz in Python/Matlab/Octave um. Testen Sie Ihren Code auf Eingaben. Als Beispielcode (in Octave) können Sie Eingaben mit der folgenden Funktion generieren:

```
function [red, blue]=RedBluePoints(n)
points=rand(2,n);
p0=rand(2,1);
u=randn(1,2);
red=zeros(2,0);
blue=zeros(2,0);
for i=1:n
    p=points(:,i);
    if u*p > u*p0
        red=[red p];
    else
        blue=[blue p];
    end
end
```

Zur Visualisierung können Sie die folgende Funktion benutzen:

```
function ShowData(red, blue, a, b, c)
figure;
hold on;
[X,Y]=meshgrid(0:0.01:1,0:0.01:1);
Z=a*X+b*Y-c*ones(size(X));
contourf(X,Y,Z,'ShowText','on');
plot(red(1,:),red(2,:),'.r');
plot(blue(1,:),blue(2,:),'.b');
```

Die Lösungen dieses Teils der Aufgabe sollen per Email eingereicht werden.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $X = \{x_1, \dots, x_l\}$ eine endliche Menge mit $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}^n$.

1. Formulieren Sie das Problem, zu entscheiden, ob ein gegebener Vektor $\tilde{x}$ in $\operatorname{conv}(X)$ liegt, als LP.

2. Beweisen Sie, dass

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \notin \operatorname{conv}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$