Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Gozel Judakova

08.05.2012

thomas.richter@ovgu.de
gozel.judakova@ovgu.de

Übung Nr. 4 zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II
Sommersemester 2020

Abgabe bis 15. Mai, 23:59 Uhr

Varianten des Newton-Verfahrens Man lese Abschnitt *6.1.4 Varianten des Newton-Verfahrens*. Sie müssen hierbei nicht sehr genau sein, z.B. können Sie die Beweise zu allen Sätzen überspringen (dürfen die aber natürlich auch gerne durchgehen). Es geht hier um einige kleine Varianten des Newton-Verfahrens, die jeweils auf einer Approximation der Ableitung beruhen.
Man beantworte kurz die folgenden Fragen:

1. Es sei bekannt, dass die Funktion $f(x)$ eine dreifache Nullstelle hat. Wie sieht die optimale Newton-Iteration aus, die quadratisch gegen diese Nullstelle konvergiert?
2. Was ist der Defekt beim Lösen einer nichtlinearen Gleichung?
3. Was ist der Zusammenhang zwischen Defekt und Fehler?
4. Optional: Testen Sie das Python-Programm auf Seite 121 zum approximierten Newton-Verfahren. Wie ist die Schrittweise `eps` optimal zu wählen?

Konvergenzbegriffe Man lese Abschnitt *6.2 Konvergenzbegriffe*. Die verschiedenen Konvergenzbegriffe werden auch bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen Anwendung finden. Man beantworte die folgenden Fragen

1. Man schreibe die typischen Fehlerabschätzungen für ein Verfahren mit linearer Konvergenz und eines mit kubischer Konvergenz auf.
2. Was ist die Konvergenzordnung, was ist die Konvergenzrate?
3. Ein Gedankenspiel: Ähnlich dem Newton-Verfahren approximieren wir $f(x)$ lokal in x_k durch ein Taylor-Polynom, jedoch durch ein **quadratisches Polynom.** Der nächste Iterationsschritt x_{k+1} ist die Nullstelle dieses quadratischen Polynoms. Ein solches Verfahren hätte kubische Konvergenz. Wo ist der Haken? Warum ist dieses Verfahren nicht sinnvoll?

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1: Wir betrachten die Iterationen

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && x_0 = 2, \quad x_k = \frac{x_{k-1}+1}{2},\\
&\text{(ii)} && x_0 = 2, \quad x_k = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_{k-1}^3 - x_{k-1}^2 + x_{k-1},\\
&\text{(iii)} && x_0 = 2, \quad x_k = x_{k-1}\big(1 - \ln(x_{k-1})\big)
\end{aligned}
$$

Man zeige, dass alle drei Folgen für $k \to \infty$ gegen 1 konvergieren und bestimme jeweils die asymptotische Konvergenzordnung sowie, falls zutreffend, die lineare Konvergenzrate.

Programmieraufgabe 4.2:

Das approximierte Newton-Verfahren beruht auf der Approximation der ersten Ableitung mit einem Differenzenquotienten. Für eine hinreichend glatte Funktion liefert die Taylor-Entwicklung die folgenden Differenzenquotienten

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)\\
f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)\\
f''(x) &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}
$$

Für die Funktion

$$f(x) = \sin\big(\exp(x)\big)$$

wollen wir erste und zweite Ableitung im Punkt $x = 1$ approximieren. Es gilt

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= e\cos(e) && \approx -2.478349732955235,\\
f''(1) &= -e\big(e\sin(e) - \cos(e)\big) && \approx -5.513635732872356.
\end{aligned}
$$

a) Für $h = 10^{-k}$ bei $k = 1, 2, 3$ gebe man die approximierten Ableitungen und den Fehler aus. Welche konvergenzordnung ermitteln sie experimentell?

Hinweis: auf `https://www.python-kurs.eu/python3_formatierte_ausgabe.php` *finden Sie Tipps zur Formatierung der* `print` *Anweisung von Python. Versuchen Sie die Ausgabe lesbar zu gestalten.*

b) Was beobachten Sie für 10^{-k} für größere Werte von k? Für welches h erhalten Sie jeweils den geringsten Fehler? Haben Sie eine Erklärung für das Verhalten bei sehr kleinem $h \to 0$?

Abgabe der Übungen (5er-7er Gruppen) sowie der Kurzfragen (2er Gruppen) per Mail an `algomath@ovgu.de`.