Institut für Analysis und Numerik 05.06.2020
Universität Magdeburg
Thomas Richter thomas.richter@ovgu.de
Gozel Judakova gozel.judakova@ovgu.de

Übung Nr. 8 zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II
Sommersemester 2020

Abgabe bis zum 12. Juni 2020

Die letzten beiden Wochen haben nur einen Einstieg in das Thema *numerisches Lösen von LGS* gegeben. Wer sich dafür interessiert, kann gerne Abschnitt *7.6 Iterative Lösungsverfahren* oder ein wenig im Buch *Einführung in die Numerische Mathematik. Begriffe, Konzepte und zahlreiche Anwendungsbeispiele. Richter, Wick, Springer 2017* (gibt es umsonst als E-Book in der Bibliothek) lesen. Iterative Verfahren versuchen das LGS nicht direkt zu lösen, sondern die Lösung, vergleichbar zum Newton-Verfahren, anzunähern. Gerade dünn besetzte aber sehr große Matrizen spielen in der Anwendung eine große Rolle. Bei $n = 1\,000\,000$ oder größer ist die LR-Zerlegung Chancenlos und iterative Methoden sind angeraten. Eines der wichtigsten Verfahren dieser Art ist das CG-Verfahren (Verfahren der Conjugierten Gradienten), welches solche Gleichungssysteme mit dem Aufwand $\mathcal{O}(n^{1.5})$ lösen kann. Mehrgitterverfahren erreichen sogar den optimalen Aufwand $\mathcal{O}(n)$. Beides kann natürlich nur für dünn besetzte Matrizen gelten. Warum? Eine voll besetzte Matrix hat $\mathcal{O}(n^2)$ Einträge. Kein Verfahren kann daher schneller als $\mathcal{O}(n^2)$ sein, denn jeder Eintrag muss in die Lösung eingehen.
Wir beenden das Kapitel LGS jedoch und widmen uns wieder einem Problem aus der Analysis.

Optimierung Aus der Analysis ist bekannt (Satz vom Minimum und Maximum), dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ihr Mininum und Maximum annimmt. Es gibt also $x_*, x^* \in [a, b]$ mit

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*) \quad \forall x \in [a, b].$$

Ziel ist nun, das Minimum einer Funktion zu finden. Die Situation ist vergleichbar mit dem Zwischenwertsatz und der Nullstellensuche: jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) < 0$ hat im Intervall (a, b) mindestens eine Nullstelle. Hier war es die numerische Umsetzung sehr einfach, z.B. die Intervallschachtelung konvergiert unter diesen Voraussetzungen immer gegen eine Nullstelle. Bei der Minimierung wird sich die Situation weit schwerer gestalten. Hier ist kein Verfahren bekannt, welches den Satz vom Minimum und Maximum verlässlich umsetzt.
Man lese die Einführung in Abschnitt *8. Optimierung*. Der Beweis zu Satz 8.2 kann als Auffrischung der Analysis angesehen. Man sollte ihn aber genau lesen. Denn: Bei der Nullstellensuche ist die Intervallschachtelung genau dem Beweis zum Zwischenwertsatz nachentfunden. Beim Beweis zu Satz 8.2 wird es keine entsprechende numerische Realisierung geben. Man gebe kurze Antworten:

1. Was bedeutet es, dass ein Punkt x ein zulässiger Punkt für eine Minimierungsaufgabe ist?

2. Was ist der Unterschied zwischen globalem und lokalem Minimum?

3. Was ist der Unterschied zwischen striktem Minimum und einfach Minimum?

4. Was bedeutet es, dass der Beweis zu Satz 8.2 *nicht konstruktiv* ist?

Optimalitätskriterien Es wird keine einfachen Methoden geben, die das Minimum einer Funktion berechnen. Ist ein Kandidat für ein Minimum $x_* \in [a, b]$ bekannt, so ist es im allgemeinen Fall nicht einmal möglich zu prüfen, ob x_* ein Minimum ist. Wir müssten $f(x_*)$ ja mit allen (unendlich vielen) Punkten $x \in [a, b]$ vergleichen. Wir leiten daher zunächst notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Minimum her, welche einfacher zu überprüfen sind.
Man lese Abschnitt *8.1 Optimalitätsbedingungen*. Die Argumentation in den Beweisen zu den Sätzen 8.4, 8.7 und 8.8 ist jeweils sehr ähnlich. Es genügt, den Beweis zu Satz 8.4 genauer zu lesen.
Im Anschluss an Beispiel 8.9 geht es um den Begriff der *Konvexität*, sowohl angewendet auf Mengen als auf Funktionen. Konvexität wird wichtig sein zur Identifikation von globalen Minima. Der Begriff der Konvexität sollte aus der Analysis-Vorlesung bekannt sein. Dann ist einzig Satz 8.14 neuer und wichtiger Inhalt.
Man gebe kurze Antworten

1. Was ist ein Sattelpunkt?

2. Was ist der Unterschied zwischen einer notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingung?

3. Wie verläuft jede Sekante einer konvexen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

4. Welche Art von Extremstelle hat $f(x) = x^3 + x^2$ im Punkt $x = 0$?

Aufgabe 8.1:

Keine Aufgabe, da es viel zu lesen gibt.

Programmieraufgabe 8.2:

Man erstelle ein Python-Programm, welches in einem gegebenen Intervall versucht, alle Nullstellen, das globale Minimum sowie das globale Maximum zu identifizieren.
Kern ist es eine Funktion zu schreiben, die alle Nullstellen einer gegebenen Funktion $f(x)$ (welche entweder die Funktion selbst oder ihre Ableitung sein kann) berechnet. Hierzu wähle man die folgende einfache Idee

- Das Intervall $[a, b]$ wird in N Teilintervalle unterteilt.
- Falls in einem der Teilintervalle ein Vorzeichenwechsel stattfindet, so wird hier die Nullstelle mit dem Newton-Verfahren gesucht

Grundzüge sind in `template_08.py` vorgegeben. Dieses Vorgehen wird dann auf die Funktion sowie ihre Ableitung angewendet. Man achte jedoch auch auf die Einhaltung der Intervallgrenzen sowie mögliche Minima und Maxima am Rand.
Man gebe Nullstellen, Minimum und Maximum zu den folgenden Funktionen an:

$$\begin{array}{lll} (a) & f(x) = \exp(-2x^2) + 3\sin(x^2 + 3x) & x \in [-2, 2] \\ (b) & f(x) = \dfrac{\cos(4x)}{2 - \sin(x)} & x \in [-1, 3] \end{array}$$