Institut für Analysis und Numerik 19.06.2020
Universität Magdeburg
Thomas Richter thomas.richter@ovgu.de
Gozel Judakova gozel.judakova@ovgu.de

Übung Nr. 10 zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II
Sommersemester 2020

Abgabe bis zum 26. Juni 2020

Minimierungsverfahren können einerseits direkt zur Optimierung von Prozessen eingesetzt werden. Wir können uns z.B. die Frage stellen: welcher Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat zu gegebenen Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ den geringsten quadrierten Abstand. Hierzu minimieren wir die Funktion

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

und könnten ein Minimum z.B. mit dem Gradientenverfahren suchen.
Eine weitere wichtige Anwendung von Minimierungsmethoden ist die *Parameteridentifikation*. Hier geht es um die folgende Aufgabe: wir kennen eine Gesetzmäßigkeit, beschrieben durch eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dies kann z.B. ein Modell zur Vorhersage der Geschwindigkeit eines in der Luft fallendes Objektes sein

$$v(t) = \frac{gm}{\alpha}\Big(1 - \exp\Big(-\frac{\alpha t}{m}\Big)\Big) \tag{1}$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist, m die Masse des Objekts und α eine Konstante, welche die Reibung des Objekts in der Luft beschreibt.
Angenommen, wir kennen Messdaten für fallende Objekte zu einigen Zeitpunkten und wollen hieraus eine Vorhersage für alle Zeiten treffen, kennen aber nicht die genauen Werte der Parameter m, α, g. Dann ist es die Aufgabe der *Parameteridentifikation* diese Parameter möglichst gut aus den Messdaten zu rekonstruieren. Hierzu wird das Problem in ein Minimierungsproblem überführt: Angenommen $t_1, t_2, \dots, t_n$ sind die Messzeitpunkte und $v_1, v_2, \dots, v_n$ die jeweils gemessenen Geschwindigkeiten. Dann versuchen wir die unbekannten Parameter m, α, g so zu bestimmen, dass die Abweichung zwischen Modell und Messwerten minimal wird

$$F(m, \alpha, g) = \sum_{i=1}^{n} |v[m, \alpha, g](t_i) - v_i|^2 \to \min,$$

wobei $v[m, \alpha, g](t)$ das Modell (1) für die spezielle Wahl der Parameter ist. Das Gradientenverfahren kann nun zur Bestimmung dieses Minimums verwendet werden.

Parameteridentifikation Man lese die Einleitung zu Abschnitt *8.3 Parameteridentifikation* und gebe kurze Antworten

1. Warum ist es unter Umständen notwendig oder besser, ein Parameterschätzungsproblem mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu betrachten, als die Parameter für eine Auswahl von Messpunkten (genauso viele Messpunkte wie Parameter) exakt zu bestimmen?

2. Haben Sie eine Idee, warum man häufig das Quadrat der Norm verwendet um ein Minimierungsproblem zu definieren und nicht die Norm selbst, d.h. anstelle von Def. 8.20
$$\sum_{i=1}^{N} \|f_i - f(\mathbf{q}_{opt})\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \|f_i - f(\mathbf{q})\| \quad \forall \mathbf{q} \in Q?$$

Gaußsche Ausgleichrechnung Man lese Abschnitt *8.3.1 Gaußsche Ausgleichrechnung* und gebe kurze Antworten

1. Was ist das Normalgleichungssystem?

2. Warum hat das Normalgleichungssystem immer eine eindeutige Lösung?

Allgemeine Parameterschätzungsprobleme Man lese Abschnitt *8.3.2 Allgemeine Parameterschätzungsprobleme*. Hier wird eigentlich nichts neues eingeführt. Der Unterschied ist, dass sich das resultierende Minimierungsproblem nicht mehr exakt mit dem Normalgleichungssystem lösen lässt. Stattdessen müssen wir - wie in der Einleitung zu diesem Blatt oben beschrieben - das Gradientenverfahren einsetzen. Dieser Abschnitt stellt insbesondere die Algorithmen zusammen, die im Rahmen der praktischen Aufgabe verwendet werden können.

Aufgabe 10.1:

Zu gegebenen Wertepaaren (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$ suchen wir die Ausgleichsgerade

$$y(x) = \alpha + \beta x,$$

welche die Punkte im Least-Squares Sinne bestmöglich approximiert.
a) Man gebe das zugehörige überbestimmte LGS an, d.h. wie sehen Matrix A und rechte Seite b aus?

b) Man stelle das zugehörige Normalgleichungssystem auf und gebe die Einträge von $A^T A$ sowie von der rechten Seite $A^T b$ in Abhängigkeit von den (x_i, y_i) an.

c) Man konkretisiere das Gradientenverfahren zur Bestimmung der Least-Squares-Lösung

$$F(\alpha, \beta) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\alpha + \beta x_i - y_i|^2 \to \min$$

Das bedeutet: man gebe zu α, β den Gradienten $\nabla F(\alpha, \beta)$ an.

Programmieraufgabe 10.2:

Wir beobachten den Fall eines Körpers auf einem unbekannten Planeten mit unbekannter Schwerkraft und Reibung. Hierzu wählen wir das Modell (vergleiche die Einführung)

$$v(t) = g\lambda\Big(1 - \exp\big(-\frac{t}{\lambda}\big)\Big),$$

mit der (unbekannten) Schwerkraft g und dem (unbekannten) Verhältnis zwischen Masse und Reibung $\lambda = m/\alpha$.

Man implementiere das Gradientenverfahren zur Bestimmung der Least-Squares Lösung gemäß Abschnitt *8.3.2 Allgemeine Parameterschätzungsprobleme* im Skript. Zur Schrittweitenkontrolle kann entweder die Armijo-Regel oder das einfache Linesearch verwendet werden. Für die vorgegebenen Testdaten bestimme man die Parameter g und λ. Wieviele Schritte im Gradientenverfahren wurden benötigt?

Man plotte die Testpunkte sowie die identifizierte Funktion im Intervall $t \in [0, 20]$.