Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Gozel Judakova

01.05.2012

thomas.richter@ovgu.de
gozel.judakova@ovgu.de

Übung Nr. 3 zur Vorlesung Algorithmische Mathematik II
Sommersemester 2020

Woche vom 1. Mai bis 08. Mai 2020

Intervallschachtelung Man lese Abschnitt 6.1.2 Intervallschachtelung und beantworte kurz die folgenden Fragen

1. Unter welchen Bedingungen konvergiert die Intervallschachtelung gegen eine Nullstelle?

Die Intervallschachtelung konvergiert im Intervall $I = [a, b]$, falls f in I stetig ist und einen Vorzeichenwechsel hat, d.h. $f(a)f(b) < 0$.

2. Wir gehen aus vom Startintervall $I = [2, 8]$. Wieviele Schritte sind notwendig, um einen Fehler von 0.01 zu garantieren? (Unabhängig von der Funktion $f(x)$)

In jedem Schritt halbiert sich die Intervallgröße, d.h. es sind n Schritte mit

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (8-2) < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad n > -\log_2\left(\frac{0.01}{6}\right),$$

also $n > 9.23$, z.B. $n = 10$ Schritte notwendig.

3. Man nenne ein Beispiel für ein Nullstellenproblem, wo die Intervallschachtelung nicht angewendet werden kann, obwohl die Funktion innerhalb eines Intervalls $I = [a, b]$ eine Nullstelle hat. (Es reicht eine kurze Beschreibung einer speziellen Situation, eine Skizze oder die Angabe einer Funktion)

Die Intervallschachtelung kann nicht bei Funktionen angewendet werden, die eine doppelte Nullstelle haben, z.B. $f(x) = x^2$, da hier kein Vorzeichenwechsel vorliegt.

Das Newton-Verfahren Man lese Abschnitt 6.1.3 Das Newton-Verfahren. Zentral ist hier Konvergenzsatz 6.7 und der zugehörige Beweis. Man gebe kurze Antworten:

1. Was ist die Konstruktionsidee des Newton-Verfahrens?

In jedem Schritt des Newton-Verfahrens wird die Funktion durch ihre Tangente angenähert. Die nächste Iteration ist dann die Nullstelle der Tangente. Das Newton-Verfahren nutzt also die linear Taylor-Approximation.

2. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$. Ausgehen vom Startwert x_0 gebe man die ersten beiden Iterierten x_1, x_2 des Newton-Verfahrens an.

Mit $f'(x) = x - 2$ ist die Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{2}x_k^2 - 2x^k + 1}{x_k - 2} = \frac{x_k^2 - 2}{2x_k - 4}$$

STARTWERT?

3. Welche Bedingung muss für den Startwert gelten, damit das Newton-Verfahren konvergiert?

Grob gesagt: Der Startwert muss hinreichend nahe an der Nullstelle liegen, z.B. darf zwischen Startwert und Nullstelle die Ableitung nicht Null werden (d.h. kein Extrempunkt).

Genau: mit $m = \min_{[a,b]} |f'| > 0$ und $M = \max_{[a,b]} |f''|$ sei $\rho > 0$ so gegeben, dass $M\rho/(2m) < 1$. Dann muss $|x_0 - z| < \rho$ gelten.

4. Was bedeutet quadratische Konvergenz? Was bedeutet lineare Konvergenz. Man gebe entweder eine eindeutige Formel an oder beschreibe den Unterschied.

Die Konvergenzordnung ist die Zahl α in der Abschätzung

$$|z - x_{k+1}| < c|z - x_k|^\alpha,$$

c wäre die Konvergenzrate. Quadratisch bedeutet, dass der Fehler sich in jedem Schritt quadriert, das Verfahren konvergiert also mit jedem Schritt schneller. Bei linearer Konvergenz bleibt die Konvergenzrate, also der Faktor zwischen neuem und altem Fehler immer der gleiche.

5. An welcher Stelle wird die Bedingung $m := min_{[a,b]}|f'(x)| > 0$ beim Nachweis der Konvergenz des Newton-Verfahrens zwingend benötigt?

Im Falle $m = 0$ gäbe es also ein $x \in [a, b]$ mit $f'(x) = 0$. Dieses x könnte (zufälligerweise) einmal innerhalb der Iteration erreicht werden, d.h. $x_k = x$ mit $f'(x_k) = 0$. Die Newton-Iteration ist dann nicht mehr wohl definiert. Auch ist $m = 0$ ein Widerspruch zur Annahme $q := \rho M/(2m) < 1$ mit $\rho > 0$. Es gäbe also kein geeignetes Startintervall

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1: Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$f''(x) \leqslant 0, \quad f'(x) \geqslant \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

d.h., die Funktion ist konkav und streng monoton steigend.

a) Man zeige, dass f in $\mathbb{R}$ genau eine Nullstelle besitzt.

Die Funktion ist wegen $f'(x) \geqslant \alpha > 0$ streng monoton steigend. Es kann somit höchstens eine Nullstelle geben.
Weiter gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)\, ds.$$

Für $x > 0$ gilt

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)\, ds. \geqslant f(0) + \int_0^x \alpha\, ds = f(0) + \alpha x \to \infty \text{ für } x \to \infty,$$

und für $x < 0$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)\, ds. = f(0) - \int_x^0 f'(s)\, ds \leqslant f(0) - \alpha x \to -\infty \text{ für } x \to -\infty.$$

Es muss also genau eine Nullstelle geben.

b) Man zeige, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen diese Nullstelle konvergiert.

Es sei $z \in \mathbb{R}$ die eindeutige Nullstelle. Die Newton-Iteration lautet

$$N(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen, dass immer

$$N(x) \leqslant z$$

gilt. D.h. ab x_1 befindet sich die Iteration immer links der Nullstelle.

Mit der Taylor-Entwicklung gilt

$$\begin{aligned}N(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x + \frac{f(z) - f(x)}{f'(x)} = x + \frac{f(x) + f'(x)(z-x) + f''(\zeta)(x-z)^2/2 - f(x)}{f'(x)} \\ &= x + (z-x) + \frac{f''(\zeta)(x-z)^2/2}{f'(x)} = z + \frac{f''(\zeta)(x-z)^2/2}{f'(x)}\end{aligned}$$

Mit $f' > 0$ und $f'' \leqslant 0$ folgt

$$N(x) \leqslant z$$

Nun sei $x < z$ wir zeigen monoton wachsende Iterierte. Wieder mit Taylor, diesmal erster Ordnung, gilt

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x + \frac{f(z) - f(x)}{f'(x)} = x + \frac{f'(\zeta)}{f'(x)}(z-x)$$

Da $f' \geqslant \alpha > 0$ und $z - x > 0$ folgt bereits monotones Wachstum. Die Folge konvergiert, und da als als Fixpunkt von $N(x) = x$ nur die NS gibt gilt Konvergenz gegen diese. Wir können die Konvergenzrate aber sogar quantifizieren. Denn wegen $f' \geqslant \alpha > 0$ folgt

$$N(x) > x + \frac{\alpha}{f'(x)}(z-x)$$

Weiter ist $x < z$ also $f'(x) \leqslant f'(z) =: \beta$ also

$$N(x) > x + \frac{\alpha}{f'(x)}(z-x) \geqslant x + \frac{\alpha}{\beta}(z-x)$$

Da z die feste NS ist, können wir auch $\beta < \infty$ als fest annehmen. Dann gilt

$$z - N(x) < z - x - \frac{\alpha}{\beta}(z-x) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)(z-x),$$

also mindestens lineare Konvergenz. Sind wir nahe genug an der NS, so erhalten wir irgendwann auch die volle quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Programmieraufgabe 3.2:

a) Man implementiere das Newton-Verfahren zum Auffinden einer Nullstelle $z \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man realisiere die folgende Steuerung zum Abbruch:

- Das Verfahren bricht ab, wenn das Residuum $|f(x_k)|$ kleiner als 10^{-14} ist.
- Das Verfahren bricht mit einer Fehlermeldung ab, sobald das Residuum zu stark gegenüber dem Startresiduum steigt, genauer gesagt im Fall $|f(x_k)| > 100 \cdot |f(x_0)|$, oder falls mehr als 20 Schritte benötigt werden.

Eine Vorlage findet sich in `template_03.py`. Man teste das Verfahren anhand der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x(3-x^2)}{4}$$

und gebe Approximation x_k und Residuum $|f(x_k)|$ für die folgenden Startwerte aus

$$x_0 = 0.7, \quad x_0 = 1 - 10^{-8}, \quad x_0 = -1, \quad x_0 = 1.2$$

b) Das *Sekanten-Verfahren* ist eine Variante des Newton-Verfahrens, bei dem die Ableitung $f'(x)$ durch eine Approximation der letzten beiden Iterationswerte genähert wird,

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}},$$

also, aufbauend auf zwei unterschiedlichen Startwerten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Anhand der Funktion aus Aufgabe **3.2a)** vergleiche man die Konvergenz von Newton-Verfahren und Sekanten-Verfahren. Wieviele Schritte werden jeweils benötigt um ein Residuum 10^{-14} zu erreichen. Als Startwerte wähle man (für das Newton-Verfahren jeweils nur x_0)

$$(x_0, x_1) = (-2, -1), \quad (x_0, x_1) = (-0.999, 0.999), \quad (x_0, x_1) = (0.4, 3).$$

c) (1 Punkt) Man stelle den Konvergenzverlauf aus **b)** für beide Verfahren graphisch dar. Dabei wähle man auf der x-Achse die Anzahl der Schritte, auf der y-Achse logarithmisch das Residuum.

Abgabe der Übungen sowie der Kurzfragen bis Freitag nach Ausgabe (einschließlich) per Mail an `algomath@ovgu.de`.

Die Abgabe der Kurzfragen ist in festen 2er Gruppen möglich. Für die Übungsaufgaben eine Abgabe pro (5er-7er) Gruppe. Jede Gruppe hat eine wöchentliche Videokonferenz mit Gozel Judakova. Pro Woche wird die praktische Übungsaufgabe von einem/r anderen Teilnehmer/in der Gruppe vorgestellt.

Die Anforderungen an den Leistungserwerb sind erfüllt, wenn im Laufe des Semesters die Hälfte der Kurzfragen korrekt beantwortet werden und wenn mindestens einmal eine Präsentation der Programmierübung in den Videokonferenzen erfolgt ist. Teilnehmer/Innen, die in diesem Semester technische Probleme bei der Bearbeitungen mit den Progammierübungen habe, bitte ich um kurze Nachricht (thomas.richter@ovgu.de). Wir finden dann eine individuelle Lösung.