Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter 29.05.2020

Lösung zu: Übung Nr. 7 zur Algorithmische Mathematik I
Wintersemester 2019/2020

Abgabe bis zum 05. Juni 2020

Vertiefung: LR-Zerlegung

Die LR-Zerlegung

1. Unter welchen Umständen existiert die LR-Zerlegung einer Matrix A.

Die LR-Zerlegung $A = LR$ existiert, wenn bei der Elimination keine Diagonalelemente auftauchen die Null sind. Die Invertierbarkeit der Matrix A ist eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung. Die LR-Zerlegung kann durch Zeilen-Tausch, die sogenannte Pivotisierung verbessert werden, so dass sie für alle invertierbaren Matrizen existiert, dann aber als Zerlegung der Form $PA = LR$, wobei P eine Pivot-Matrix ist, die Zeilen von A tauscht.

2. Können Sie einer Matrix ansehen, ob die LR-Zerlegung existiert?

Das geht leider nicht, bevor man den Zerlegungsprozess startet.

3. Angenommen, die LR-Zerlegung einer 100×100 Matrix kann in 2.3 Sekunden erstellt werden. Wir lange würde es etwa bei einer 1000×1000 Matrix dauern?

Der Aufwand ist kubisch. D.h. wenn n um den Faktor 10 steigt, wird der Aufwand um den Faktor $10^3 = 1000$ steigen, es sind somit 2300 Sekunden, also etwa 40 Minuten.

4. Wie kann die LR-Zerlegung, d.h. L und R direkt anstelle der Matrix A gespeichert werden? Es haben doch L und R jeweils

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Einträge, also zusammen $n^2 + n$. Die Matrix A kann aber nur n^2 verschiedene Zahlen speichern.

Wir wissen, dass L Einsen auf der Diagonale hat. Diese müssen daher nicht extra gespeichert werden. Die Diagonaleinträge von A stehen somit zur Speicherung von R zur Verfügung.

Die Cholesky-Zerlegung und positive definite Matrizen

Bandmatrizen

1. Was ist eine Bandmatrix mit Bandbreite 4?

Das ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit der Eigenschaft $A_{ij} = 0$ für alle $|i - j| < 4$. Die Matrix kann nur nicht-Null Einträge auf der Diagonalen, sowie auf den jeweils 4 benachbarten Nebendiagonalen links und recht haben.

2. Wie gross ist der Aufwand zur Durchführung der LR-Zerlegung einer Bandmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Bandbreite $\sqrt{n}$? (Das ist ein wichtiger Spezialfall in der Anwendung).

Allgemein gilt dann $O(nm^2)$ also hier $O(n^2)$ anstelle von $O(n^3)$.

3. In Beispiel 7.35 wird gezeigt, dass der Aufwand der LR-Zerlegung von der Sortierung der Matrix abhängt. Wir wollen aber ein LGS lösen. Warum kann man trotz Umsortieren der Zeilen und Spalten dennoch das gleiche LGS lösen?

Man muss einfach auch die Einträge der rechten Seite b tauschen. Ein LGS ist ein System aus n linearen Gleichungen. Zeilentausch bedeutet nur, in welcher Reihenfolge diese n Gleichungen aufgeschrieben werden. Dies ändert die Lösung nicht.

Aufgabe 7.1:

Man beweise Satz *7.34* (*LR-Zerlegung einer Bandmatrix*). Also, es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix mit Bandbreite m. Die LR-Zerlegung $A = LR$ sei durchführbar. Man zeige, dass die Matrizen L und R wieder Bandmatrizen mit Bandbreite m sind und dass die Zerlegung mit dem Aufwand $\mathcal{O}(nm^2)$ durchführbar ist.

Im ersten Schritt der Zerlegung wird die erste Spalte unterhalb des Eintrags $(1,1)$ eliminiert durch

$$A_{jk} = A_{jk} - \frac{A_{j1}}{A_{11}} A_{1k} \quad \forall j = 2, \dots, n,\ \forall k = 2, \dots n.$$

Da A eine Bandmatrix ist gilt aber $A_{1k} = 0$ für $|k-1| > m$ also genügt

$$A_{jk} = A_{jk} - \frac{A_{j1}}{A_{11}} A_{1k} \quad \forall j = 2, \dots, n,\ \forall k = 2 = 1+1, \dots 1+m.$$

Aus gilt bereits $A_{j1} = 0$ für alle $|j-1| > m$, denn A ist eine Bandmatrix. Unterhalb muss nicht eliminiert werden und der erste Schritt verkürzt sich zu

$$A_{jk} = A_{jk} - \frac{A_{j1}}{A_{11}} A_{1k} \quad \forall j = 1+1 = 2, \dots, 1+m,\ \forall k = 2 = 1+1, \dots 1+m,$$

und benötigt somit m^2 Operationen. Für die Matrix L werden die Werte

$$L_{j1} = \frac{A_{j1}}{A_{11}}, \quad j = 2, \dots, m+1$$

gespeichert. Alle werde liegen im eine Band der Breite m um die Diagonale.
Bei der Elimination wird die Matrix A nur im Indexbereich

$$(j,k) \text{ mit } j = 2, \dots, 2+m, \quad k = 2, \dots, 2+m$$

geändert. Diese Indizes liegen alle innerhalb der Bandbreite mit

$$|j-k| \leqslant m.$$

Nach Elimination ist die Matrix somit immer noch eine Bandmatrix.
Der nächste Schritt wird nun auf die Teilmatrix $\tilde{A}_{ij}$ für $i, j > 1$ angewendet und es kann entsprechend argumentiert werden.
Wir fassen zusammen:

- Jeder der n Elininationsschritte benötigt höchstens m^2 Operationen. Insgesamt ergibt sich somit $O(nm^2)$.
- Dabei werden nur die m Elemente unterhalb der Diagonalen Eliminiert so dass $L_{ij} = 0$ für $|i-j| > m$ gilt, L ist also Bandmatrix.

- Die transformierte Matrix behält auch in jedem Schritt die Bandstruktur, also ist auch R eine Bandmatrix.

Programmieraufgabe 7.2:

In der Programmvorlage ist der Algorithmus zur LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vorgegeben. Die Zerlegung wird dabei in der Matrix A selbst gespeichert.

a) Man vervollständige die Methoden `vorwarts(...)` (bereits vorgegeben) und `rueckwaerts` ↪ `(...)` zum Lösen der Teilprobleme mit L und R und teste die Methode zum Lösen der Gleichungssysteme bei der vorgegebenen Matrix bei $m = 2, 4, 8, 16, 32$.

b) Die Testmatrix ist eine Bandmatrix der Bandbreite $m = \sqrt{n}$. Man modifiziere die Methoden `lr(...)`, `vorwaerts(...)`, `rueckwaerts(...)` und messe jeweils für $m = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ (man achte darauf, dass $n = m^2$ gilt, die Matrizen sind also groß) die Zeit für die jeweiligen Funktionen vor und nach der Modifikation.