Dr. Carmen Gräßle
MPI für Dynamik Komplexer Technischer Systeme Magdeburg
graessle@mpi-magdeburg.mpg.de
Prof. Dr. Thomas Richter
OVGU - Institut für Analysis und Numerik
thomas.richter@ovgu.de

24.04.2020

Exercises "Numerical Methods in Fluid Mechanics"
Summer 2020 - Kurzfragen 2

Materialgesetze

1. Für die 10 Unbekannten Dichte (1), Geschwindigkeit (3) und Stress (6, da symmetrisch) haben wir nur 4 Gleichungen, Masseerhaltung (1) und Impulserhaltung (3). Es fehlen also weitere Zusammenhänge, damit die Gleichungen wohlgestellt sein können.

2. Objektivität bedeutet, dass der Blickpunkt des Betrachters keinen Einfluss auf das Materialverhalten hat. Diese Annahme ist wohl in der klassischen Mechanik immer richtig. Isotropie bedeutet, dass das Material keine ausgezeichneten Richtungen hat. Es reagiert z.B. bei Zug immer gleich, unabhängig von der Richtung. Diese Eigenschaft ist nicht immer richtig, z.B. bei Materialien die aus feinen Fasern bestehen, die alle gleich angeordnet sind.

3. Divergenzfreiheit bedeutet einfach $div(v) = 0$, d.h., das Vektorfeld hat die Divergenz 0. Inkompressibilität bedeutet, dass man das Volumen des Gebietes $|V(t)|$ durch Krafteinwirkung nicht ändern kann. Anders ausgedrückt: die Dichte ρ bleibt immer gleich.

Die Navier-Stokes Gleichungen

1. Grundsätzlich ist es erst einmal sinnvoll anzunehmen, dass die Strömung nicht in den Rand hinein geht oder aus einem Rand herauskommt (der nicht gerade Einfluss oder ausfluss oder vielleicht eine Membram ist). Das nennt man dann *no-penetration* oder *slip-Randbedingung*, also $n \cdot v = 0$.

   Entlang des Randes kommt es darauf an. Spielt Reibung eine dominante Rolle, so ist no-slip, also $\tau \cdot v = 0$ somit $v = 0$ ein gutes Modell. Das wählt man z.B. normalerweise für Wasser. Wenn die Reibung jedoch keine große Rolle mehr spielt, z.B. sehr schnelle Flugzeug in sehr großer Höhe, dann ist das Model nicht sehr akurat. Das sieht man auch am Abschnitt über die Randschicht, die immer kleiner wird. Wenn man sie sowieso nicht auflösen kann, dann ist es - auf jeden Fall numerisch - auch nicht sinnvoll, hier ein Haften zu fordern.

   Es gibt auch andere Szenarien, wo eine no-slip Bedingung zu falschen Effekten führt: man stellt sich ein Glas Wasser vor, das man langsamt hin und her bewegt. Das Wasser bewegt sich dann auch am Glasrand. Eigentlich ist das ein Fall für no-slip. aber wenn es am Rand keine Bewegung gibt, dann kann man den Effekt damit nicht erklären.

   Alternativ gibt es noch die Navier-slip Bedingung

   $$n \cdot v = 0 \text{ sowie } \gamma\tau \cdot v = (\sigma\tau) \cdot v.$$

   Hier kann über einen Parameter γ der Einfluss der Reibung bestimmt werden. Der Term $\sigma\tau$ bezeichnet die Kraft in Tangentialrichtung. Für $\gamma \to 0$ folgt einfach: Reibung ist Null, d.h. die

Strömung kann frei am Rand entlanggleiten. Man spricht daher auch von *free slip*. Für $\gamma \to \infty$ (d.h. auf der rechten Seite $1/\gamma \to 0$) folgt die no-slip Bedingung mit $\tau \cdot v = 0$.

2. Beim Thema stationär gehen die Begriffe etwas durcheinander. Von den stationären Navier-Stokes Gleichungen spricht man, wenn der Zeit-Term $\partial_t v$ weg fällt. Angenommen, die rechte Seite $f(t)$ oder die Randdaten hängen von der Zeit ab, so ist die resultieren Strömung dennoch instationär.

   Von instationärer Strömung spricht man normal, wenn sich das Strömungsfeld v nicht in der Zeit ändert, wenn also $\partial_t v = 0$ gilt. Hieraus folgt noch nicht $v = 0$.

   In der Strukturmechanik bedeutet stationär hingegen $v = 0$, d.h. keine Geschwindigkeit. Die Deformation darf allerdings Null sein, diese ändert sich aber nicht in der Zeit, denn es gilt ja $d_t u = v$ und hier $v = 0$.

3. Partielle Differentialgleichungen sind meist Randwertprobleme. Am Ausströmrand kennen wir die Strömung jedoch noch nicht. So ein Rand ist normalerweise künstlich. Wird z.B. die Strömung durch einen Wasserhahn modelliert, so ist das Problem am Austritt eigentlich nicht beendet. Eigentlich müsste hier die Mehrphasenströmung zwischem Wasser und der umgebenen Luft betrachtet werden. Will man aber nur das Verhalten in der Leitung beschreiben, so wird ein künstlicher Rand gesetzt. Eine Ausströmbedingung ist daher immer ein Modell, nicht physikalisch exakt.

   Die do-nothing Bedingung ist ein guter Kompromiss. In vielen Situationen hat sie einen nur sehr geringen Einfluss. In einer Kanalströmung kommt es nicht darauf an, wo der künstliche Rand gesetzt wird. Das macht sie nicht physikalisch sinnvoll, aber praktikabel, da sie (hoffentlich) zu keiner wesentlichen Verfälschung führt.