Dr. Carmen Gräßle
MPI für Dynamik Komplexer Technischer Systeme Magdeburg
graessle@mpi-magdeburg.mpg.de
Prof. Dr. Thomas Richter
OVGU - Institut für Analysis und Numerik
thomas.richter@ovgu.de

Abgabe 08. Mai

Exercises "Numerical Methods in Fluid Mechanics"
Summer 2020 - 2

Reynolds Number Lesen Sie Abschnitt 1.4.3 The Reynolds number im Skript und beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Was bedeutet es, wenn 2 vergleichbare Strömungskonfigurationen, z.B. die Strömung um ein Auto die gleiche Reynoldszahl haben?

Geschwindigkeitsfeld und Druck lassen sich dann unmittelbar ineinander umrechnen, z.B. für die Geschwindigkeit gilt:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = V\hat{\mathbf{v}}(\hat{x}), \quad \mathbf{x} = L\hat{\mathbf{x}}.$$

Da die Navier-stokes Gleichungen nichtlinear sind muss die Reynoldszahl übereinstimmen.

2. Ein Lastwagen mit $L = 25m$ fährt mit $80km/h$. Wie groß ist die Reynoldszahl?

$$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{80 \cdot 10^3 m \cdot 25m}{3.6 \cdot 10^3 s \cdot 1.7 \cdot 10^{-5} m^2/s} \approx 3.3 \cdot 10^7$$

3. Wie schnell müßte ein Modell des Lastwagens mit L = 1m in einem Tank gefüllt mit Hoing fahren, damit sich die gleiche Strömungssituation einstellt?

$$3.3 \cdot 10^7 \approx \frac{V \cdot 1m}{10^{-2} m^2/s} = 100V \cdot s/m \quad \Leftrightarrow \quad V = 3.3 \cdot 10^5 m/s$$

Modellströmungen Lesen Sie Abschnitt *1.4.4 Model configurations* im Skript und beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Warum nennt man die Kanalströmung auch druckgetriebene Strömung? Das steht so nicht im Skript, es geht eher um eine Vermutung.

Angenommen x sei die Hauptstömungsrichtung, also

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v(y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann hängt die Strömung nicht von x ab. Aus der Inkompressibilität muss folgen, dass alles, was in den Kanal einströmt auch ausströmen muss. Der Druck hingegen ist in y und z Richtung konstant und hängt nur von x ab. Hier nimmt er ab. D.h. am Eingang ist der Druck hoch, am Ausfluss niedrig. Die Druckdifferenz treibt auch die Strömung.

2. Wovon hängt die Größe der Grenzschicht ab?

---

von der Reynoldszahl und der Länge des Objekts, etwa

$$\frac{L}{\sqrt{Re}}.$$

3. Wie groß ist die Grenzschicht beim Lastwagenbeispiel oben etwa?

$$\frac{25m}{\sqrt{3.3 \cdot 10^7}} \approx 0.0043m \approx 4.3mm$$

Man zeige, dass sowohl Couette flow und der Poiseulle flow die do-nothing Ausflussbedingung erfüllen. Erfüllen die beiden Strömungen auch die Navier-Stokes Gleichungen bei Verwendung des vollen symmetrischen Tensors? (die Parameter ρ, ν können auf 1 gesetzt werden)

$$\sigma = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - pI.$$

Für die Couette-Strömung gilt (Skalierung ist egal)

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Da $\nabla \mathbf{v}$ (und die Transponierte) konstant ist, ist die Divergenz jeweils Null. Es wird also auch der volle Tensor erfüllt.

Am einem Rand mit $\vec{n} = (1,0,0)$, d.h. in Haupt-Strömungsrichtung gilt:

$$\partial_n \mathbf{v} = \partial_x \mathbf{v} = 0.$$

Da auch $p = 0$ ist die do-nothing Bedingung erfüllt.

Für die Kanalströmung (in 3d) gilt

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 - y^2 - z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -2y & -2z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{v}(x,y,z)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2y & 0 & 0 \\ -2z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz des transponierten Anteils ist Null. Daher erfüllt die Kanalströmung auch den vollen symmetrischen Tensor.

Bei einem Rand mit $\vec{n} = (1,0,0)$ gilt

$$\partial_n \mathbf{v} = \partial_x \mathbf{v} = 0.$$

Also wird die do-nothing Bedingung erfüllt wenn zusätzlich $p = 0$ gilt.

1. Blut brauch etwa 1s um durch eine 1mm lange Kapillare des menschlichen Kreislaufs zu gelangen. Der Durchmesser der Kapillare ist 7μm und der Druckabfall 2.6kPa. Wie groß ist die Viskosität des Blutes?

Alle Rechnungen in μm und s. Angenommen wird eine Kanalströmung. Mit $R = 3.5\mu m$ ist dann (angenommen Strömung in x-Richtung)

$$\mathbf{v} = \bar{v}\begin{pmatrix} 12.25 - y^2 - z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Etwas unklar ist, was es bedeutet, dass Blut 1s für $1mm = 1000\mu m$ braucht. Ich gehe von durchschnittlicher Flussrate aus:

$$\bar{V} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r\mathbf{v}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi,$$

also

$$\bar{V} = \bar{v}\frac{2\pi}{\pi R^2}\cdot\int_0^R r(R^2 - r^2)dr = \frac{R^2}{2}\bar{v} = 6.125\bar{v}$$

Damit nun $\bar{V} = 1mm/1s$ folgt

$$6.125\bar{v} = 1\,000\frac{\mu m}{s}$$

Also

$$\bar{v} \approx 163\cdot\frac{\mu m}{s}, \quad v_{max}163\cdot 12.25 \approx 2\,000\frac{\mu m}{s}.$$

Hiermit ist dann

$$-\mu\Delta\mathbf{v} = \frac{4\mu\bar{v}}{(\mu m)^2} \approx 653\frac{\mu}{s\mu m}$$

Also

$$\partial_x p = -653\frac{\mu}{s\mu m},$$

somit bei $L = 1mm = 1\,000\mu m$ ein Druck-Abfall von

$$1\,000\mu m\cdot 653\frac{\mu}{s\mu m} = 653\,000\frac{\mu}{s} \overset{!}{=} 2600\frac{kg}{ms^2} = 2\,600\,000\frac{g}{10^6\mu m\cdot s^2},$$

Daher

$$\mu \approx 4\frac{g}{10^6\mu m\cdot s} = 0.004\frac{kg}{m\cdot s}$$

Oder, entsprechend etwa $4\cdot 10^{-6}$ als kinematische Viskosität.