Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Henry von Wahl

05.06.2020

thomas.richter@ovgu.de
henry.vonwahl@ovgu.de

Blatt 8 zur Vorlesung Numerische Mathematik
Sommersemester 2020

Abgabe bis 12. Juni, 23:59

Numerische Quadratur Es geht um die numerische Berechnung oder Approximation von Integralen. Zu manchen Funktionen ist die Stammfunktion analytisch nicht bekannt, oder, selbst wenn sie bekannt ist, ist Ihre Aufstellung zu aufwändig und eine Approximation des Integralwertes ist effizienter.
Das Grundprinzip der numerischen Integration (Quadratur genannt) ist das Folgende:

1. Die Funktion $f(x)$ wird auf dem Intervall $[a, b]$ mit einem Polynom $p(x)$ interpoliert

2. Das Integral über f wird durch das Integral über das Polynom p approximiert.

Die grundlegenden Fragen werden die Güte der Approximation sein und insbesondere der Aufwand: wieviele Stützstellen müssen verwendet werden, um eine entsprechende Genauigkeit zu erhalten.

Newton-Cotes Quadratur Man lese Abschnitt *8.5 Numerische Quadratur* bis einschließlich Abschnitt 8.5.1. Hier wird das Grundprinzip der Quadratur eingeführt. Es geht um die *Newton-Cotes Regeln*, die sich dadurch auszeichnen, dass die Stützstellen im Intervall $[a, b]$ äquidistant gewählt werden.
Der (recht triviale) Beweis zu Satz 8.37 sowie die Beweise zu Satz 8.40 und 8.41 bauen auf der Newton'schen Darstellung der Interpolation auf. Auf der Homepage ist ein Video mit alternativen Beweisen verlinkt, so dass wir die Newton-Darstellung mit den dividierten Differenzen nicht benötigen. Die im Buch beschriebenen Beweise können daher übersprungen werden.
Man gebe kurze Antworten

1. Was bedeutet es, dass eine Quadraturregel die Ordnung 4 hat?

2. Welche Regel ist dies und welche welche Polynome werden mit dieser Regel exakt integriert?
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(b)$$

3. Was ist eine Bedingung für die Stabilität einer Quadraturregel?

4. Warum ist es nicht sinnvoll, Newton-Cotes Regeln von beliebig hoher Ordnung zu konstruieren?

5. Welche Ordnung hat eine Quadraturregel basierend auf der Interpolation mit $n+1$ Stützstellen mindestens? Warum haben manche Formeln eine höhere Ordnung?

Stückweise Quadratur Entsprechend der Interpolation wird auch die Quadratur stückweise durchgeführt. Der Grund ist, dass wir für $n \to \infty$ (d.h. immer größeren Polynomgraden) keine Konvergenz erwarten können. Das entsprechende Konzept, dargestellt in Abschnitt *8.5.2 Stückweise interpolatorische Quadraturformeln* ist daher auch sehr einfach und führt kaum neue Begriffe ein. Man gebe kurze Antworten

1. Man gebe die summierte Simpson-Regel auf n Teilintervallen zur Integration einer Funtion $f(x)$ auf $[a, b]$ an.

2. Mit welcher Ordnung in der Schrittweite h konvergiert die summierte Mittelpunktsregel, wenn die Funktion f zweimal stetig differenzierbar ist?

Romberg-Quadratur Die Romberg-Quadratur (Abschnitt 8.5.3) ist eine Anwendung der Extrapolation zum Limes auf die summierte Trapezregel. Die originale Methode ist in diesem Abschnitt ausführlich beschrieben. Die Schwierigkeit dabei ist nicht die Anwendung der Extrapolation sondern der Nachweis einer Entwicklung der Fehlerabschätzung der Trapezregel in geraden Potenzen, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\Big(\frac{f(a)}{2} f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2}\Big) = \sum_{k=1}^{m} c_k(f) h^{2k} + \mathcal{O}(h^{2m+2}).$$

Dieser Zusammenhang, aufbauend auf der *Euler-Maclaurinschen Summenformel* (Satz 8.49 im Skript) ist die Grundlage zu einem Extrapolationsansatz mit Ordnung $q = 2$. D.h. durch Extrapolation von z.B. 3 aufeinanderfolgenden Approximationen kann die Ordnung $O(h^6)$ erreicht werden.
Es steht Ihnen frei, den Abschnitt zu lesen, er ist jedoch keine Voraussetzung zur Bearbeitung der Übungsaufgaben.

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1

Es sei $f \in C^2([a,b])$ zweimal stetig differenzierbar. Wir untersuchen zur Approximation des Integrals die summierte Mittelpunktsregel

$$I_h^n(f) := h \sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Big), \quad h := \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + h \cdot i.$$

Angenommen, die Auswertung der Funktion sei gestört mit

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon(x), \quad \max_{x \in [a,b]} |\epsilon(x)| < \epsilon.$$

Man leite eine Fehlerformel für die gestörte Auswertung der Quadratur her, d.h.

$$|\int_a^b f(x)\,dx - I_h^n(\tilde{f})| \leqslant |\int_a^b f(x)\,dx - I_h^n(f)| + |I_h^n(f) - I_h^n(\tilde{f})|.$$

Der erste Teil ist entsprechend zu Satz 8.48 und Satz 8.41 gegeben als

$$|\int_a^b f(x)\,dx - I_h^n(f)| \leqslant \frac{b-a}{24} h^2 \max_{[a,b]} |f''| \tag{1}$$

Der zweite Teil kann mit der Vorwärts-Stabilitätsanalyse einfach abgeschätzt werden.

Aufgabe 8.2

Wir untersuchen die Exterpolation eines Prozesses $a(h)$ für $h \to 0$, beschränken uns jedoch auf den Fall, dass nur zwei Werte $(h, a(h))$ und $(h/2, a(h/2))$ extrapoliert werden. Man leite Formeln für die Exterpolation mit einem Ansatz der Ordnung $q \in \mathbb{N}$ her, d.h. Interpolation mit einer Funktion $p(x) = a + b \cdot x^q$ für allgemeines q. Das Ergebnis kann in Aufgabe 8.3 genutzt werden.

Programmieraufgabe 8.3

Wir untersuchen summierte Quadraturregeln zur Berechnung von

$$\int_{-1}^{2} \exp(-x^2)\,dx \approx 1.62890552357484487054.$$

a) Man implementiere summierte Boxregel, Mittelpunktsregel, Trapezregel und Simpsonregel. Man stelle den Quadraturfehler in Bezug auf die Schrittweite h für $n = 1, 2, 4, \dots, 128$ (doppelt logarithmisch) dar und man verifiziere die zu erwartende Ordnung.

b) Man extrapoliere jeweils zwei aufeinander Werte unter Verwendung eines linearen und eines quadratischen Ansatzes, d.h. $q = 1$ und $q = 2$. Man stelle die Ergebnisse für die vier Quadraturregeln wieder doppelt-logarithmisch dar (pro Formel ein Plot mit summierter Regel, Extrapolation mit $q = 1$ und Extrapolation mit $q = 2$). Welche Ordnung können Sie für jeweils erreichen?

Abgabe per Mail an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de). Abgabe der Kurzfragen in 2er Gruppen, der Übungsaufgaben in den 5er Gruppen. Die theoretische Gruppenaufgabe ist freiwillig.