Institut für Analysis und Numerik
Universität Magdeburg
Thomas Richter
Henry von Wahl

12.06.2020

thomas.richter@ovgu.de
henry.vonwahl@ovgu.de

Blatt 9 zur Vorlesung Numerische Mathematik
Sommersemester 2020

Abgabe bis 19. Juni, 23:59

Gauss Quadratur Die Newton-Cotes Formeln basieren auf Quadratur mit äquidistant verteilten Stützstellen. Wir haben gesehen, dass die Quadratur mit $n+1$ Stützstellen mindestens die Ordnung $n+1$ liefert, also Polynome von Grad n exakt integriert. Es gibt jedoch Quadraturformeln, die besser sind: die Mittelpunktregel liefert für $n=0$ die Ordnung 2, die Simpson-Regel liefert für $n=2$ die Ordnung 4. Diese Woche suchen wir die Ursache hierfür und identifizieren insbesondere die bestmögliche Verteilung der Stützstellen, um eine möglichst gute Ordnung zu erhalten.
Ich möchte das Ergebnis vorwegnehmen: es wird uns gelingen mit $n+1$ Stützstellen immer die Ordnung $2n+2$ zu erreichen, d.h. Polynome von Grad $2n+1$ exakt zu integrieren. In dieser Hinsicht ist die Mittelpunktsregel mit $n=0$ also Ordnung $2\cdot 0+2=2$ optimal. Die Simpsonregel ist zwar bei $n=2$ und Ordnung 4 gut, aber nicht optimal. Optimal wäre bei 3 Stützstellen die Ordnung $2\cdot 2+2=6$.
Wir Entwickeln in der Woche die *Gauß-Quadratur*. Wenn in Vorlesugen oft eher historisches Material behandelt wird, so ist dies hier anders. Die Gauss-Quadratur ist auch heute noch im Allgemeinen die effizienteste Methode zur numerischen Integration und das Verfahren der Wahl.
Man lese Abschnitt *8.5.4 Gauß-Quadratur* bis Seite 404, d.h. bis vor *Gauß-Legendre-Quadratur* An dieser Stelle wird nun doch häufiger die Newton'sche Darstellung der Interpolation verwendet. Es folgt bis zum 14. Juni ein kurzes Video zur Zusammenfassung der wesentlichen (und nicht schwierigen) Zusammenhänge. Man gebe kurze Antworten

1. Was ist die maximal mögliche Ordnung einer Quadraturregel mit 2 Stützstellen? Ist die Trapezregel optimal?

2. Welche bedingung müssen die Stützstellen erfüllen, damit wir die Chance haben, eine optimale Quadraturregel der Ordnung $2n+2$ zu erhalten?

Gauß-Legendre-Quadratur Die Gauß-Legendre-Quadratur ist die eigentliche Gauß-Quadratur, alles weitere werden Spezialfäll sein. Man lese Abschnitt *Gauß-Legendre-Quadratur* ab Seite 404 bis zu *Legendre-Polynome und zweistufige Orthogonalisierung* auf Seite 411. Diese Seiten stellen die theoretischen Grundlagen der Gauß-Quadratur, ihre Realisierung und Konvergenz dar. Man gebe kurze Antworten

1. Was ist eine Gauß-Quadraturregel?

2. Sätze 8.58 und 8.59 belegen die eindeutige Existenz von Gauß-Regeln. Man versuche ganz kurz (jeweils eine Zeile) die Aussagen von beiden Sätzen zu beschreiben.

3. Man versuche zu beschreiben, warum der Orthogonalität diese wichtige Rolle zukommt?

4. Satz 8.62 besagt, dass $L^2([-1,1])$ orthogonale Polynome nur reelle einfache Nullstellen haben und dass diese im Intervall $(-1,1)$ liegen. Warum ist beides (reell, einfach) wichtig für die Umsetzung der Gauß-Quadratur?

5. Für die Quadratur benötigen wir $n+1$ Stützstellen, also $n+1$ Nullstellen. Wo genau (nicht nur Angabe des Satzes) geht hervor, dass wir wirklich $n+1$ verschiedene Stützstellen haben?

6. Warum ist es vorteilhaft, dass die Gewichte der Gauß-Quadratur alle positiv sind?

Legendre-Polynome und zweistufige Orthogonalisierung Dieser Abschnitt geht näher auf die $L^2([-1,1])$-orthogonalen Polynome ein. Es wird gezeigt, dass diese durch eine einfache Rekursionsformel bestimmt werden können. Es genügt hier, Satz *8.68* (*Legendre-Polynome*) zu lesen. Der Beweis kann, muss aber nicht durchgearbeitet werden. Man gebe eine kurze Antwort

1. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert auch schon eine Rekursions-Formel für die orthogonalen Polynome. Was ist der Vorteil von der 2-stufigen Formel?

Gauß-Tschebscheff-Quadratur Die Gauß-Legendre Quadratur ist die übliche Gauß-Quadratur und bezieht sich auf die Orthogonalisierung im L^2-Skalarprodukt und ist geeignet zur Berechnung von Integralen der Art

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Es gibt Anwendungen, wo die zu integrierende Funktion eine spezielle Struktur hat, z.B. immer eine Singularität an den Intervallgrenzen. Dann ist es möglich, eine spezielle Quadraturformel herzuleiten, die noch besser für solche Funktionen geeignet sind. Die Idee ist sehr einfach:

- Wir führen ein *gewichtetes Skalarprodukt* ein

$$(f,g)_\omega := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\,dx,$$

  mit einer Funktion $\omega(x) > 0$.

- Wir bestimmen die orthogonalen Polynome bzgl. $(f,g)_\omega$ und leiten so eine Gauß-Formel her.

- Diese ist nun optimal zur Berechnung von Integralen der Art

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx.$$

Man lese Abschnitt *Gauß-Tschebyscheff-Quadratur*. Es genügt ein grobes lesen um den Bezug zur Gauß-Legendre-Quadratur zu setzen. Die Beweise müssen nicht gelesen werden. Wichtiger und auch relevant für die einfache Gauß-Quadratur sind die abschließenden Paragraphen ab Satz 8.76 (ein Tippfehler, es sollte besser Bemerkung 8.76 sein). Man gebe kurze Antworten

1. Was ist die Gewichtsfunktion der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur?
2. Wie sieht die Gauß-Legendre Quadratur mit 2 Stützstellen auf dem allgemeinen Intervall $[a, b]$ aus?

Übungsaufgaben

Da es sehr viel zu lesen ist, keine Programmieraufgabe. Die folgende (freiwillige) theoretische Aufgabe rekapituliert den Prozess der Gauß-Quadratur am Beispiel eines gewichteten Skalarprodukts.
Aufgabenteile **a**) und **d**) sind unabhängig von den konkreten Ergebnissen der anderen Aufgaben.

Aufgabe 9.1

Wir untersuchen die verallgemeinerte Gauß-Quadratur zu einem gewichteten Skalarprodukt

$$(f, g)_\omega := \int_{-1}^{1} \omega(x)f(x)g(x)\,dx$$

zur Integrationen von Funktionen der Art

$$f_\omega(x) = \omega(x)f(x).$$

a) Man argumentiere, dass für $\omega \in C([-1,1])$ mit $\omega \geqslant 0$ und nur endlich vielen Nullstellen durch $(f, g)_\omega$ wirklich ein Skalarprodukt gegeben ist.

b) Zu dem Gewicht

$$\omega(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

bestimme man das orthogonale Polynom $p_2 \in P_2$, so dassk

$$(p_2, q)_\omega = \int_{-1}^{1} \omega(x)q_2(x)q(x)\,dx = 0$$

für alle $q \in P_1$.

Einfach mit Gram-Schmidt unter Verwendung des gewichteten Skalarprodukts. Für p_2 *muss keine Normierung durchgeführt werden*

c) Man bestimme die Nullstellen λ_1, λ_2 von $p_2(x)$ und die zur Quadratur gehörigen Gewichte

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{1} \omega(x)\frac{x-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\,dx, \quad \alpha_2 = \int_{-1}^{1} \omega(x)\frac{x-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\,dx.$$

d) Man argumentiere, dass die gefundene Formel Funktionen der Art

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)p(x)\,dx,$$

mit Polynomen $p \in P_3$ exakt integriert.

e) Man nutze die Formel zur Approximation von

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\exp(-x)\,dx \approx 1.398087688$$