Lösung zu Blatt 8Abgabe bis 12. Juni, 23:59

Numerische Quadratur

Newton-Cotes Quadratur

Man gebe kurze Antworten

1. Was bedeutet es, dass eine Quadraturregel die Ordnung 4 hat?

Ordnung vier bedeutet, dass alle Polynome bis zu Grad 3 exakt integriert werden.

2. Welche Regel ist dies und welche welche Polynome werden mit dieser Regel exakt integriert?

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(b)$$

Dies ist die (rechts-seitige) Boxregel und es werden die konstanten Polynome exakt integriert. Die Ordnung ist daher 1.

3. Was ist eine Bedingung für die Stabilität einer Quadraturregel?

Das die Quadraturgewichte alle positiv sind. Ansonsten kann es zur Auslöschung kommen.

4. Warum ist es nicht sinnvoll, Newton-Cotes Regeln von beliebig hoher Ordnung zu konstruieren?

Da irgendwann die Gewichte negativ werden. Dann werden die Formeln instabil.

5. Welche Ordnung hat eine Quadraturregel basierend auf der Interpolation mit $n+1$ Stützstellen mindestens? Warum haben manche Formeln eine höhere Ordnung?

Die haben mindestens die Ordnung $n+1$, denn das zugrundeliegende Interpolationspolynom ist mit $n+1$ stützstellen für Polynome bis Grad n exakt. Dann ist auch die Integration exakt.

Stückweise Quadratur

1. Man gebe die summierte Simpson-Regel auf n Teilintervallen zur Integration einer Funtion $f(x)$ auf $[a, b]$ an.

---

es ist mit den Stellen

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0, \dots, n$$

dann

$$I_h^2(f) = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{b-a}{3} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{b-a}{6} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b)$$

2. Mit welcher Ordnung in der Schrittweite h konvergiert die summierte Mittelpunktsregel, wenn die Funktion f zweimal stetig differenzierbar ist?

Mit $O(h^2)$. Die MPR selbst hat den Term $(b-a)^3$. Bei Summation mit Schrittweite h bleibt h^2 zur Konvergenz.

Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1

Es sei $f \in C^2([a,b])$ zweimal stetig differenzierbar. Wir untersuchen zur Approximation des Integrals die summierte Mittelpunktsregel

$$I_h^n(f) := h \sum_{i=1}^n f\big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\big), \quad h := \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + h \cdot i.$$

Angenommen, die Auswertung der Funktion sei gestört mit

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon(x), \quad \max_{x\in[a,b]} |\epsilon(x)| < \epsilon.$$

Man leite eine Fehlerformel für die gestörte Auswertung der Quadratur her, d.h.

$$|\int_a^b f(x)\,dx - I_h^n(\tilde{f})| \leqslant |\int_a^b f(x)\,dx - I_h^n(f)| + |I_h^n(f) - I_h^n(\tilde{f})|.$$

Der erste Teil ist entsprechend zu Satz 8.48 und Satz 8.41 gegeben als

$$|\int_a^b f(x)\,dx - I_h^n(f)| \leqslant \frac{b-a}{24} h^2 \max_{[a,b]} |f''| \tag{1}$$

Der zweite Teil kann mit der Vorwärts-Stabilitätsanalyse einfach abgeschätzt werden.

Für den rein diskreten Fehler gilt mit $|\epsilon_i| < eps$

$$\begin{aligned} |I_h^n(f) - I_h^n(\tilde{f})| &= \Big| h \sum_{i=1}^n \Big(f\big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\big) - \tilde{f}\big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\big)\Big)(1+\epsilon_i)\Big| \\ &\leqslant hn\epsilon(1+eps) = (b-a)\epsilon + O(eps). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$|I(f) - I_h^n(\tilde{f})| \leqslant +\frac{b-a}{24} h^2 \max |f''| + (b-a)\epsilon + O(eps)$$

Der Fehler durch Rundung und fehlerhafte auswertung von f wird also nicht verstärkt. Aus dieser Formel lässt sich die optimale Schrittweite h bestimmen, bei der beide Fehleranteile balanciert sind (wir gehen davon aus, dass eps viel kleiner ist)

$$fracb - a24h^2 \max |f''| \approx (b-a)\epsilon \quad \Rightarrow \quad h \approx \sqrt{\frac{24\epsilon}{\max |f''|}}$$

Aufgabe 8.2

Wir untersuchen die Exterpolation eines Prozesses $a(h)$ für $h \to 0$, beschränken uns jedoch auf den Fall, dass nur zwei Werte $(h, a(h))$ und $(h/2, a(h/2))$ extrapoliert werden. Man leite Formeln für die Exterpolation mit einem Ansatz der Ordnung $q \in \mathbb{N}$ her, d.h. Interpolation mit einer Funktion $p(x) = a + b \cdot x^q$ für allgemeines q. Das Ergebnis kann in Aufgabe 8.3 genutzt werden.

Mit dem Ansatz $p(x) = a + bx^q$ gilt

$$\begin{aligned} a(h) &= a + bh^q \\ a(h/2) &= a + bh^q 2^{-q} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a(h) - a(h/2) = bh^q - bh^q 2^{-q} = bh^q(1 - 2^{-q})$$

Also

$$b = \frac{a(h) - a(h/2)}{h^q(1 - 2^{-q})}$$

Und eingesetzt in die erste Gleichung ergibt dies

$$a(h) = a + \frac{a(h) - a(h/2)}{(1 - 2^{-q})},$$

also

$$a = \frac{(1 - 2^{-q})a(h) - (a(h) - a(h/2))}{1 - 2^{-q}} = \frac{2^q a(h/2) - a(h)}{2^q - 1}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} q = 1 \quad & a(0) \approx a = 2a(h/2) - a(h) \\ q = 2 \quad & a(0) \approx a = \frac{4a(h/2) - a(h)}{3} \\ q = 3 \quad & a(0) \approx a = \frac{8a(h/2) - a(h)}{7} \\ q = 4 \quad & a(0) \approx a = \frac{16a(h/2) - a(h)}{15} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Diese Formeln eignen sich zum sehr effizienten Post-Processing von konvergenten Prozessen, wenn die Ordnung q bekannt ist.

Programmieraufgabe 8.3

Wir untersuchen summierte Quadraturregeln zur Berechnung von

$$\int_{-1}^{2} \exp(-x^2)\,dx \approx 1.6289055235748487054.$$

a) Man implementiere summierte Boxregel, Mittelpunktsregel, Trapezregel und Simpsonregel. Man stelle den Quadraturfehler in Bezug auf die Schrittweite h für $n = 1, 2, 4, \dots, 128$ (doppelt logarithmisch) dar und man verifiziere die zu erwartende Ordnung.

b) Man extrapoliere jeweils zwei aufeinander Werte unter Verwendung eines linearen und eines quadratischen Ansatzes, d.h. $q = 1$ und $q = 2$. Man stelle die Ergebnisse für die vier Quadraturregeln wieder doppelt-logarithmisch dar (pro Formel ein Plot mit summierter Regel, Extrapolation mit $q = 1$ und Extrapolation mit $q = 2$). Welche Ordnung können Sie für jeweils erreichen?

Abgabe per Mail an Henry von Wahl (henry.vonwahl@ovgu.de). Abgabe der Kurzfragen in 2er Gruppen, der Übungsaufgaben in den 5er Gruppen. Die theoretische Gruppenaufgabe ist freiwillig.