Lösung zu Blatt 9Abgabe bis 19. Juni, 23:59

Gauss Quadratur

1. Was ist die maximal mögliche Ordnung einer Quadraturregel mit 2 Stützstellen? Ist die Trapezregel optimal?

Bei $n+1$ Stützstellen ist die maximal mögliche Ordnung $2n+2$, d.h. bei $n=1$ wäre 4 optimal. Die Trapezregel hat Ordnung 2, ist also nicht optimal.

2. Welche Bedingung müssen die Stützstellen erfüllen, damit wir die Chance haben, eine optimale Quadraturregel der Ordnung $2n+2$ zu erhalten?

Die Stützstellen müssen die Nullstellen des Polynoms $p_{n+1} \in P_{n+1}$ sein, welches L^2-orthogonal auf dem P_n steht, d.h.

$$\int_{-1}^{1} p_{n+1}(x)q(x)dx = 0 \quad \forall q \in P_n.$$

Dabei ist die Festlegung auf das Intervall $[-1, 1]$ nur eine Konvention. Das Konzept kann auf beliebige Intervalle Übertragen werden.

Gauß-Legendre-Quadratur

1. Was ist eine Gauß-Quadraturregel?

Eine Gauß-Quadraturformel ist eine Regel, die bei $n+1$ Stützstellen die Ordnung $2n+2$ hat.

2. Sätze 8.58 und 8.59 belegen die eindeutige Existenz von Gauß-Regeln. Man versuche ganz kurz (jeweils eine Zeile) die Aussagen von beiden Sätzen zu beschreiben.

Satz 8.58 ist die notwendige Bedingung: Falls eine Formel die Ordnung $2n+2$ hat, dann müssen die Stützstellen ein Polynom $p_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ bilden, welches orthogonal auf dem P_n steht.

Satz 8.59 ist die Umkehrung: falls so ein orthogonales Polynom existiert und falls dieses $n+1$ reelle, paarweise verschiedene NS besitzt, so bilden diese eine Gauss-Formel

3. Man versuche zu beschreiben, warum der Orthogonalität diese wichtige Rolle zukommt?

Eine Quadraturformel mit $2n+2$ Punkten ist immer exakt zur Integration von Polynomen mit Grad $2n+1$. Wir versuchen nun eine Formel zu finden, die schon bei $n+1$ Punkten hierfür exakt ist. Hierzu schreiben wir das interpolierende Polynom von Grad $2n+1$ in der Form

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j) + \sum_{i=n+1}^{2n+1} f[x_0, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

und versuchen zu erreichen, dass der 2te Teil für die Quadratur keine Rolle spielt. Der entsprechende Quadraturfehler ist gegeben durch

$$\sum_{i=n+1}^{2n+1} f[x_0, \ldots, x_i] \int_a^n \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)dx = \sum_{i=n+1}^{2n+1} f[x_0, \ldots, x_i] \int_a^b \underbrace{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}_{=p_{n+1}(x)} \underbrace{\prod_{j=n+1}^{i-1} (x - x_j)dx}_{\in P^{2n-n}=P^n}$$

und es soll für alle Polynome $f \in P^{2n+1}$ verschwinden. Dies ist dann sicher erreicht, wenn das Polynom p_{n+1} orthogonal auf dem P^n steht, so dass die Integrale immer verschwinden.

4. Satz 8.62 besagt, dass $L^2([-1, 1])$ orthogonale Polynome nur reelle einfache Nullstellen haben und dass diese im Intervall $(-1, 1)$ liegen. Warum ist beides (reell, einfach) wichtig für die Umsetzung der Gauß-Quadratur?

Zur Umsetzung der Quadraturformel benötigen wir $n+1$ paarweise verschiedene reelle Werte im Intervall $[-1, 1]$. Falls die NS außerhalb von $[-1, 1]$ liegen, so wäre die zu integrierende Funktion dort eventuell nicht definiert. Falls das Polynom vom Grad n mehrfache NS hätte, so kommen nicht genug Stützstellen zusammen. Falls die NS komplex wären, so könnte keine universelle Quadraturformel zur Berechnung reeller Integrale resultieren.

5. Für die Quadratur benötigen wir $n+1$ Stützstellen, also $n+1$ Nullstellen. Wo genau (nicht nur Angabe des Satzes) geht hervor, dass wir wirklich $n+1$ verschiedene Stützstellen haben?

Es geht um Satz 8.62. Die verschiedenen Aussagen werden mit Widerspruchsargumenten gezeigt. Die Grundidee ist jeweils zu nutzen, dass das Polynom $q(x) := p_{n+1}(x)/(x-\lambda)$ für eine NS λ in P_n liegt und somit orthogonal zu p_{n+1} ist. Dies führt jeweils zu einem Widerspruch.

6. Warum ist es vorteilhaft, dass die Gewichte der Gauß-Quadratur alle positiv sind?

Dies dient der Stabilität. Bei positiven Gewichten kann Auslöschung vermieden werden.

Legendre-Polynome und zweistufige Orthogonalisierung

1. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert auch schon eine Rekursions-Formel für die orthogonalen Polynome. Was ist der Vorteil von der 2-stufigen Formel?

Bei Gram-Schmidt-Verfahren muss jeweils bzgl. aller bisherigen Funktionen orthogonalisiert werden, d.h. in Schritt n

$$\tilde{q}_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} s^n q_k(s) ds q_k(x).$$

Der Aufwand ist hierzu $O(n)$. Insgesamt ergibt sich bei N Polynomen der Aufwand $O(N^2)$. Bei 2-stufiger Orthogonalisierung ist der Aufwand pro Schritt $O(1)$, also insgesamt $O(N)$.

Gauß-Tschebscheff-Quadratur

1. Was ist die Gewichtsfunktion der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur?

Man wählt

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

mit $\omega(x) \to \infty$ für $x \to \pm 1$.

2. Wie sieht die Gauß-Legendre Quadratur mit 2 Stützstellen auf dem allgemeinen Intervall $[a, b]$ aus?

Auf $[-1, 1]$ ist es

$$I(f) = f\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

Durch Transformation ergibt sich auf $[a, b]$

$$I_{[a,b]}(f) = \frac{b-a}{2}\Big(f\Big(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\Big) + f\Big(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\Big)\Big)$$

Übungsaufgaben

Da es sehr viel zu lesen ist, keine Programmieraufgabe. Die folgende (freiwillige) theoretische Aufgabe rekapituliert den Prozess der Gauß-Quadratur am Beispiel eines gewichteten Skalarprodukts.
Aufgabenteile **a)** und **d)** sind unabhängig von den konkreten Ergebnissen der anderen Aufgaben.

Aufgabe 9.1

Wir untersuchen die verallgemeinerte Gauß-Quadratur zu einem gewichteten Skalarprodukt

$$(f, g)_\omega := \int_{-1}^{1} \omega(x) f(x) g(x) \, dx$$

zur Integrationen von Funktionen der Art

$$f_\omega(x) = \omega(x) f(x).$$

a) Man argumentiere, dass für $\omega \in C([-1, 1])$ mit $\omega \geqslant 0$ und nur endlich vielen Nullstellen durch $(f, g)_\omega$ wirklich ein Skalarprodukt gegeben ist.

Die Symmetrie und die Linearität übertragen sich vom L^2-Skalarprodukt. Es bleibt die Homogenität. Wir betrachten

$$(f, f)_\omega = \int_{-1}^{1} \omega(x) f(x)^2 \, dx$$

für eine Funktion $f(x)$ mit $\|f\|_{L^2} > 0$. Die Funktion $\omega(x)$ ist stetig, es gilt $\omega \geqslant 0$ und ω hat nur endlich viele NS. Diese sind Nullmengen im Sinne des Lebesgue Integrals, d.h. es folgt $(f, f)_\omega > 0$ für $\|f\|_{L^2} > 0$.

b) Zu dem Gewicht

$$\omega(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

bestimme man das orthogonale Polynom $p_2 \in P_2$, so dassk

$$(p_2, q)_\omega = \int_{-1}^{1} \omega(x) q_2(x) q(x)\, dx = 0$$

für alle $q \in P_1$.

Wir orthogonalisieren $1, x, x^2$ mit Gram-Schmidt. Hierzu betrachten wir die Norm $\|f\|_\omega = (f,f)_\omega^{\frac{1}{2}}$. Dann ist

$$q_0 = \frac{1}{\|1\|_\omega} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und

$$\tilde{q}_1 = x - (x, q_0)_\omega q_0 = x - \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \omega(x) x\, dx = x,$$

da $\omega(x)x$ ungerade ist, somit ist das Integral Null. Dann

$$q_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|_\omega} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi^2 - 8}} x$$

Schließlich

$$\tilde{q}_2 = x^2 - (x^2, q_0)_\omega q_0 - (x^2, q_1)_\omega q_1 = x^2 - \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \omega(x) x^2\, dx = x^2 - \frac{\pi^2 - 8}{\pi^2}$$

Wir müssen nicht ortogonalisieren, da wir nur die Nullstellen des Polynoms benötigen.

c) Man bestimme die Nullstellen λ_1, λ_2 von $p_2(x)$ und die zur Quadratur gehörigen Gewichte

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{1} \omega(x) \frac{x - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\, dx, \quad \alpha_2 = \int_{-1}^{1} \omega(x) \frac{x - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\, dx.$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1/2} = \pm \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\pi}$$

und hiermit ergeben sich die Gewichte

$$\alpha_{1/2} = \frac{2}{\pi}$$

d) Man argumentiere, dass die gefundene Formel Funktionen der Art

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) p(x)\, dx,$$

mit Polynomen $p \in P_3$ exakt integriert.

Die Formel basiert den Nullstellen des Polynoms $p_2(x)$ welches Orthogonal auf P_1 bzgl. $(f, g)_\omega$ steht. Es ist somit eine Gauss-Regel und diese hat bei $n + 1$ Stützstellen die Ordnung $2n + 2$, d.h. hier bei $n = 1$ folgt die Ordnung 4, somit Exaktheit für Polynome bis Grad 3.

e) Man nutze die Formel zur Approximation von

$$\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \exp(-x)\, dx \approx 1.398087688$$

Leider war ein in der Aufgabenstellung ein Fehler im exakten Ergebnis

---

Die Formel lautet

$$I(f) = \frac{2}{\pi}\Big(\exp\big(\frac{-\sqrt{\pi^2 - 8}}{\pi}\big) + \exp\big(\frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\pi}\big)\Big) \approx 1.395750529$$

also ein rel. Fehler von 0.0017.
Würde man die std-Gauss-Formel ohne Gewichte auf das Integral $\omega(x)\exp(-x)$ anwenden, so erhält man mit $\lambda_{1/2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ den Inegralwert

$$I(\omega(x)\exp(-x)) \approx 1.443547092$$

mit einem rel. Fehler von 0.03, also ein etwa 20 mal größerer Fehler.